

Apprentissages numériques en maternelle

Dominique Verdenne
IEN, circonscription Romorantin

Blois, 21 avril 2010

Quand faire des mathématiques en maternelle?

❖ Activités rituelles

❖ Activités dites « fonctionnelles »

Elles sont liées à la vie de la classe

Elles n'ont pas d'objectifs d'apprentissage

Elles sont un prétexte à l'activité mathématique

❖ Les activités construites

Elles sont élaborées par l'enseignant

Elles visent des objectifs précis

Les enjeux

- ❖ Nécessité de donner aux enfants **l'occasion de construire** leurs connaissances :
 - non pour elles-mêmes,
 - mais parce qu'elles sont nécessaires pour **résoudre des problèmes**,
 - qu'elles sont de **bons outils**...
- ❖ Utilisation des nombres pour répondre à la question:
 - **à quoi servent les nombres?**
- ❖ Avant de pouvoir répondre à la question:
 - **qu'est-ce que les nombres?**

Du côté des textes...

- ❖ « Vivre des situations des situations de jeux, de recherches, de productions libres ou guidées, d'exercices, riches et variés »
- ❖ « Stimuler le désir d'apprendre et multiplier les occasions de diversifier ses expériences et d'enrichir sa compréhension »
- ❖ « Laisser à chaque enfant le temps de s'accoutumer, d'observer, d'imiter, d'exécuter, de chercher, d'essayer »

Programmes 2008

Approcher les quantités et les nombres

- ❖ « Période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres et de son utilisation dans les procédures de quantification ».
- ❖ « Découverte et compréhension des fonctions du nombre »
- ❖ « Accompagnement en questionnant: comment, pourquoi... »
- ❖ « Dès le début, les nombres sont utilisés dans **des situations où ils ont un sens** et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but »

Programmes 2008

Et la suite écrite dans les textes ? ...

- ❖ « La suite écrite est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier, par exemple) ou des jeux (déplacements sur pistes portant sur des désignations chiffrées).
- ❖ Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage.
- ❖ L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres. »

Programmes 2008

A propos des problèmes ...

- ❖ Certes « les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul

MAIS

- ❖ c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe « égal ») et les techniques. »

A propos de la comptine

Mémorisation de la chaîne numérique verbale:
coexistence de trois parties:

❖ **Partie stable et conventionnelle**

❖ **Stable et non conventionnelle**

❖ **Ni stable, ni conventionnelle**

Acquisition verbale

Partie stable et conventionnelle:

- ❖ Sa taille croit très vite avec l'âge des enfants
- ❖ Augmentation surtout vers 4 ans $\frac{1}{2}$

Partie stable et non conventionnelle:

- ❖ Typique au cours de la phase d'acquisition pour la séquence inférieure à 30
- ❖ Non découverte des règles de formation des expressions arithmétiques verbales

Partie ni stable, ni conventionnelle:

- ❖ Poursuite de la récitation même si stock de termes ordonnés (de manière plus ou moins conventionnelle) épuisé

Niveaux d'élaboration de la chaîne numérique

Niveau chapelet:

- ❖ Nom des nombres sans **aucune individualité**
- ❖ Récitation d'un bloc verbal «un deux trois quatre... »
- ❖ **Pas de signification arithmétique**
- ❖ En présence d'objets : pas de dénombrement, simple simulation

Niveau « chaîne insécable »:

- ❖ Séquence composée de **mots individualisés**
- ❖ « un, deux, trois, quatre,... »
- ❖ **Pas de comptage** à partir d'un nombre quelconque
- ❖ Mise en place des premières conduites de dénombrement
- ❖ Phase qui peut durer au-delà de 5 ans

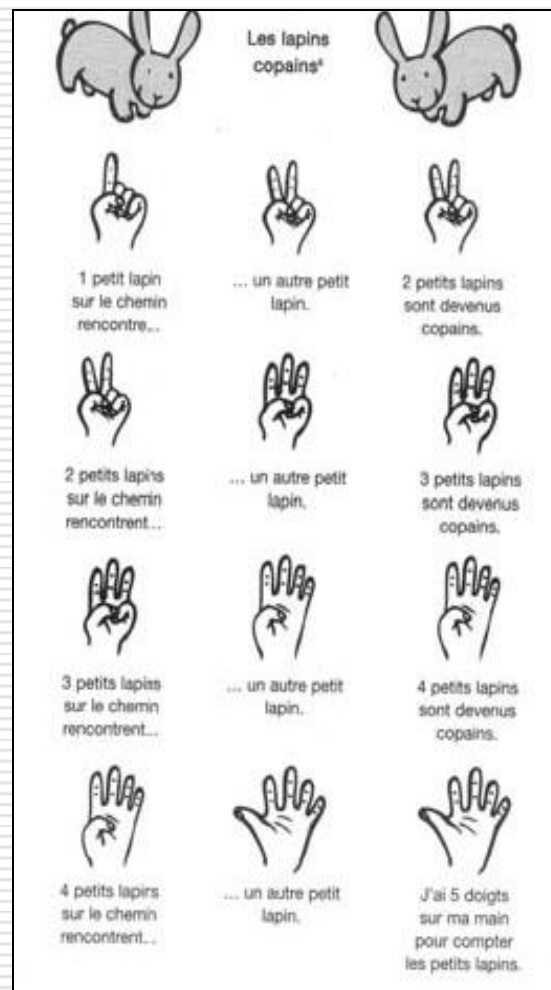
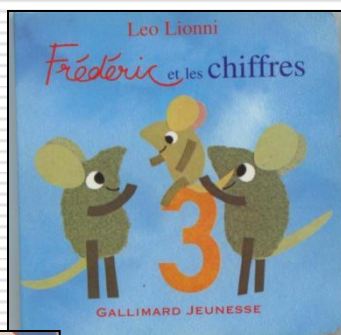
Niveaux d'élaboration de la chaîne numérique (suite)

Niveau « chaîne sécable »: flexibilité

- Mise en place de nouvelles habiletés
 - Réciter la comptine à partir de x
 - Réciter la comptine de x à y
 - Compétences établies vers 6 ans
 - Mise en œuvre de procédures efficaces et rapides dans résolution problèmes additifs
 - Relations ordinales entre éléments
- ❖ La possibilité de résolution des problèmes additifs soustractifs est intimement liée aux procédures mobilisables avec la chaîne verbale.

Connaissance de la comptine

« Quand j'ajoute un objet de plus,
la nouvelle quantité
est le nombre qui suit. »



Le nombre pour répondre à la question « combien? »

❖ **Comprendre le lien entre:**

- une collection d'objets
- un attribut de cette collection : sa quantité
- un mot de la suite des nombres

❖ **Mettre en œuvre des techniques** (procédures)

- Reconnaissance globale de très petites quantités
- Reconnaissance globale de petites quantités
- Dénombrement / comptage
- Par reconnaissance globale de quantités et groupements

Le nombre pour répondre à la question « combien? »

❖ **Techniques** (procédures)

Par **reconnaissance globale** de très petites quantités

Par reconnaissance globale de **petites quantités organisées** en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé)

Technique du dénombrement

Correspondance un mot de la suite numérique avec un objet

Ne pas en oublier, ne pas en recompter,

Dire la suite des mots nombres dans l'ordre

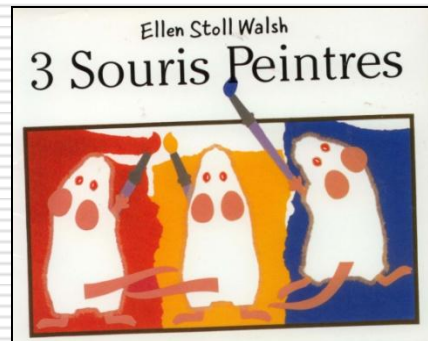
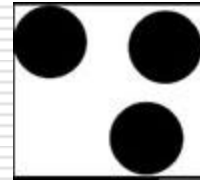
Savoir que le dernier mot prononcé est le mot qui répond à la question « combien ? »

Par reconnaissance globale de quantités et **groupements**

Le nombre pour répondre à la question « combien? »

❖ Technique:

Reconnaissance des très petites quantités:
jeux de doigts, comptines



Le nombre pour répondre à la question « combien? »

❖ **Technique:** reconnaissance globale de petites quantités



Deux façons de dénombrer une collection de livres

CONSTRUCTION D'UNE COLLECTION-TÉMOIN DE DOIGTS
DÉCRITE VERBALEMENT PAR UNE DÉCOMPOSITION :

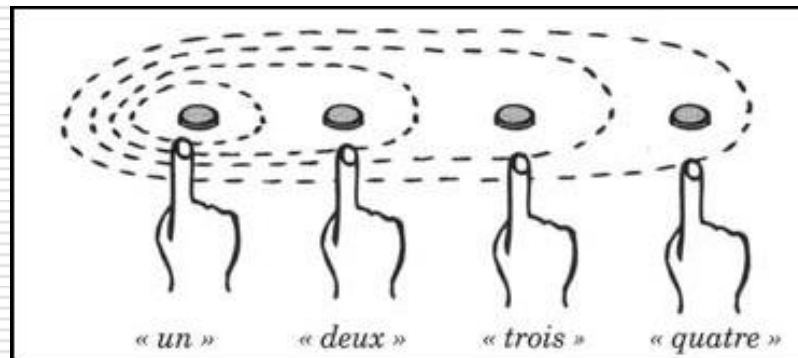
Un, un, un, et un... Quatre.



Le nombre pour répondre à la question « combien? »

❖ Technique dénombrement / comptage:

- Correspondance : un mot de la suite numérique avec un objet
- Ne pas en oublier, ne pas en recompter,
- Dire la suite des mots nombres dans l'ordre
- Savoir que le dernier mot prononcé est le mot qui répond à la question « combien ? »
- Numération verbale et M.Fayol



- *Modèle de comptage de type accumulateur (d'après English & Hallford, 1995)*

Ce qu'en dit Michel Fayol

- ❖ « L'utilisation de la numération verbale à des fins de détermination de la cardinalité d'une collection nécessite la compréhension du principe suivant lequel le langage encode la numérosité. » (*cf schéma précédent*)
- ❖ « Les symboles numériques signalent la cardinalité par le rang qu'ils occupent dans la chaîne verbale (un, deux, trois, quatre, cinq...). « Cinq » renvoie à une quantité plus importante que « quatre » puisque «cinq» vient après «quatre». L'utilisation du langage ne conserve comme telle aucune trace de l'accroissement de quantité. Elle nécessite donc que les noms des nombres évoquent des numérosités. **Or, cette évocation ne va pas de soi.** »
- ❖ « Les mots-nombres ne renvoient pas aussi facilement aux quantités »

Deux façons de dénombrer une collection de livres

CONSTRUCTION D'UNE COLLECTION-TÉMOIN DE DOIGTS
DÉCRITE VERBALEMENT PAR UNE DÉCOMPOSITION :



Un,



un,



un,



et un...



Quatre.

LE COMPTAGE :



Un,



deux,



trois,



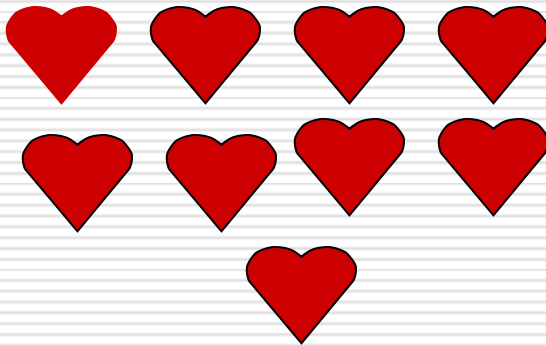
quatre...

Quatre.

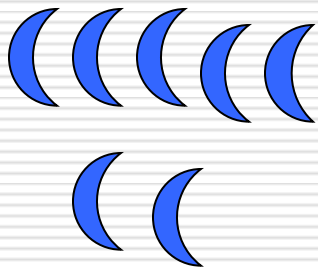


Le nombre pour répondre à la question « combien? »

- ❖ Technique reconnaissance globale de quantités et groupements



Quatre et quatre, huit
huit et un, neuf!



Cinq, six, sept!
Cinq et deux, sept!

Erreurs dénombrement / comptage

- ❖ Défaut de synchronisation entre le geste de la main et la récitation de la comptine
- ❖ Mauvaise organisation du comptage: pas de distinction entre objets comptés et non comptés: **énumération** mal maîtrisée
- ❖ Pas de statut particulier accordé au dernier mot-nombre énoncé et reprise du comptage à la question « Combien ? »: concepts de **collection / désignation** mal maîtrisés

Quelques remarques ...

- ❖ « Il serait préférable de réserver le terme « **compter** » au fait de réciter la suite numérique à partir de 1, alors que « **dénombrer** », parfois remplacé par « nombrer », désigne une procédure, quelle qu'elle soit, qui permet de déterminer le nombre d'éléments d'une collection. »
- ❖ Le dénombrement par comptage est la technique utilisant la comptine numérique de un en un à partir de un.
- ❖ « Il nous a paru important de **ne pas privilégier la procédure de dénombrement par comptage en Petite Section**, mais d'en permettre une acquisition progressive, principalement à partir de la moyenne section. »

Dominique Valentin

Repérage des compétences

1. Connaissance de la comptine (noter le nombre atteint et les difficultés)			
a) à partir de 1 jusqu'à ...			
b) à partir de ... jusqu'à ...			
1. Dénombrement (noter le nombre demandé, la réussite ou l'échec, et les difficultés...)			
a) Proposer un tas d'objets déplaçables (quantité légèrement inférieure au nombre atteint en 1, mais inférieure à 20) et demander « Combien y a-t-il d'objets ? »	Nombre : réussite échec difficultés : Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés : Nombre : réussite échec difficultés : Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés : Nombre : réussite échec difficultés : Nombre : réussite échec difficultés :
b) Demander de prendre un nombre donné d'objets dans une boîte qui en contient une trentaine (quantité légèrement inférieure atteint en 1, mais inférieure à 20).	Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés :
c) Reconnaissance ou réalisation de très petites collections (de 1 à 6) : dés, constellations, autres dispositions.	Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés :	Nombre : réussite échec difficultés :
1. Reconnaissance des écritures des nombres (noter les demandes et entourer les réussites, noter éventuellement la stratégie utilisée par l'élève. Accès direct ou recours au comptage à partir de 1)			
a) Proposer des écritures de nombres (sur la file numérique) et demander à l'élève de les nommer.	Nombres demandés : stratégie : Nombres demandés : stratégie :	Nombres demandés : stratégie : Nombres demandés : stratégie :	Nombres demandés : stratégie : Nombres demandés : stratégie :
b) Dire des nombres et demander à l'élève de les retrouver sur la file numérique.			
Apprentissages numériques en maternelle			

Passage du dénombrement au calcul

L'étape qui consiste à passer du dénombrement au calcul est complexe.

Elle nécessite:

- ❖ La construction d'une collection équipotente à une collection donnée: **autant que**
- ❖ La comparaison de plusieurs collections d'un point de vue numérique: **plus que, moins que**
- ❖ L'évaluation relative de la quantité d'une collection en fonction d'une autre: **combien en plus?**
- ❖ Décomposition d'une collection en sous collections sans perdre de vue le tout

Des situations pour donner du sens aux nombres

- ❖ Le nombre est utilisé pour **comparer**
- ❖ Le nombre est utilisé comme **mémoire de la quantité** ou de la **position**
- ❖ Le nombre est utilisé pour **anticiper** (le résultat de certaines actions sur les quantités)
- ❖ Le nombre est utilisé pour **partager**

Contextes dans lesquels sont utilisés les nombres

Les contextes mathématiques:

- ❖ Contexte cardinal: **combien?**
- ❖ Contexte ordinal: **où?**
- ❖ Contexte de la mesure: **combien d'unités?**

Les contextes séquentiels

Le contexte symbolique:

- ❖ Décoder les écritures chiffrées

Le contexte non numérique

Les domaines numériques

- ❖ Domaine des nombres **visualisables**
- ❖ Domaine des nombres **familiers**
- ❖ Domaine des nombres **fréquentés**
- ❖ Domaine des **grands** nombres

Conséquences : les différentes représentations d'un nombre; leur importance

- ❖ Représentations stéréotypées:
Dés, cartes à jouer, dominos, doigts

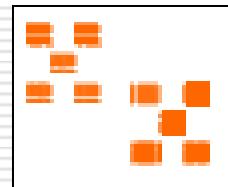


Différentes représentations d'un nombre

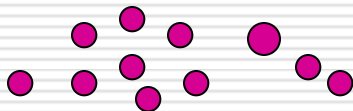
- ❖ Représentations organisées mais non stéréotypées doigts:



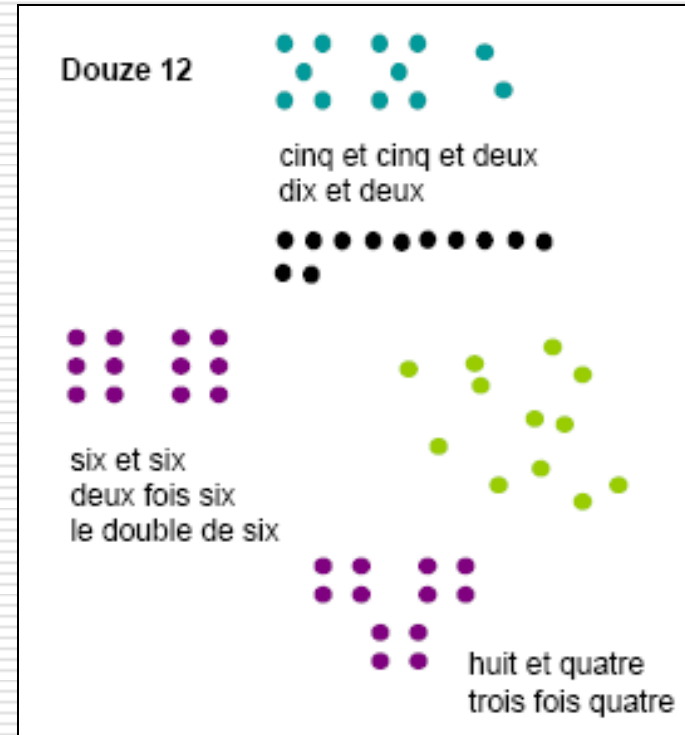
groupements de stéréotypes:



- ❖ Représentations non organisées



D'autres représentations du nombre ...



Trois et deux $3+2$ 3 et 2 la moitié de dix
 est multiple de est le tiers de est le dixième de
 est une fraction décimale de ...

Quelques situations

Analyse des situations:

- ❖ Rôle du nombre: à quoi sert-il?
- ❖ Quel domaine numérique, quel contexte?
- ❖ Quelles **procédures** ?
- ❖ Quel langage?
- ❖ ...

Le nombre comme mémoire (de la quantité) en PS

❖ Les animaux de la ferme (PS)

But : se procurer une mangeoire et une seule par animal

❖ Les problèmes envisageables

- Simple distribution (appropriation)
- Introduction de la remorque : préparer juste ce qu'il faut pour nourrir les animaux, les enfants voient les animaux
- Les enfants ne voient plus animaux quand ils préparent
- variante : les enfants voient les animaux mais doivent préparer, d'un seul coup, pour tous les types d'animaux

❖ Procédures visées:

- Correspondance terme à terme mentale / perception globale
- Correspondance terme à terme en se représentant la collection, perception globale, recours aux décompositions...
- Correspondance terme à terme ou paquet à paquet, possibilité d'organiser la collection...

Le nombre comme mémoire (de la quantité) en MS, GS, début de CP

- ❖ Aller chercher « juste ce qu'il faut, pas plus, pas moins » : pas de contraintes
- ❖ Aller chercher juste ce qu'il faut, en un seul voyage
- ❖ Commander oralement
- ❖ Commander par écrit
- ❖ Procédures visées : quand y a-t-il recours au nombre ?
- ❖ L'importance de la validation

Le nombre comme mémoire (de la quantité)

❖ La consigne:

- Identique en PS, MS, GS
- Indique le but à atteindre
- Formulée en termes compréhensibles par l'élève,
- Ne nomme pas la notion visée : « *autant que* »
- Ne donne aucune indication sur les procédures à convoquer : « *compte, donne le nombre* »

❖ Évolution du milieu

- Des collections proches en PS à des collections éloignées et non visibles en GS

❖ Évolution des notions à construire

- De l'auto-communication à la communication orale, puis écrite
- Construction de collections avec d'autres contraintes: double, moitié

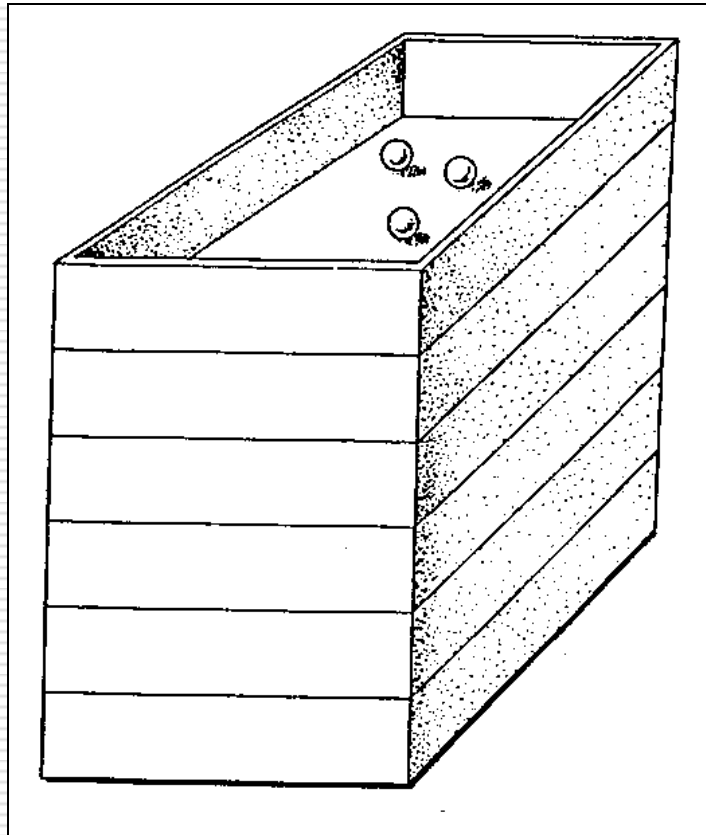
A propos des procédures

- ❖ Importance des procédures non numériques
- ❖ En PS et en MS : importance de donner aux élèves l'occasion de **réaliser d'eux-mêmes des correspondances termes à termes** pour fabriquer la deuxième collection. Ces correspondances termes à termes participent à la construction du concept de nombre.
- ❖ Des phases d'action assez longues, au cours desquelles l'élève est confronté individuellement au problème.
- ❖ Des phases de formulation et de preuve

Connaissances numériques visées

- ❖ PS et MS : première entrée dans le nombre
Perception globale des tout premiers nombres
Perception additive des premiers nombres
Importance du discours tenu lors des bilans
- ❖ GS et la plupart des élèves de MS
Il est clair que la procédure attendue est de compter!
l'objectif est de donner du sens à l'apprentissage en conduisant l'élève à **les utiliser lui-même** pour résoudre le problème posé.

En grande section et en CP: le nombre pour comparer



Les boîtes empilées

- Prendre le contenu de la boîte s'il y a **plus** de points sur le dé que d'objets dans la boîte
- Comparer les gains en fin de partie



En grande section et en CP: le nombre pour comparer

Comparaison en cours de partie

- Domaine des nombres « visualisables »
- Justification des choix par l'élève

Comparaison en fin de partie

- Procédures qui ne font pas appel aux nombres
- Procédures qui font appel aux nombres

En grande section et en CP: le nombre pour comparer

- ❖ Des éléments **déplaçables**: facilite le dénombrement
- ❖ Une situation **évolutive** pour faire **évoluer les procédures et les connaissances**:

Éléments non déplaçables

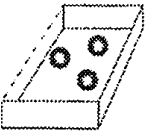

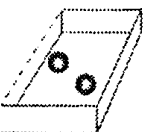

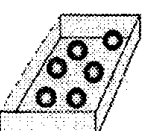

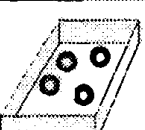

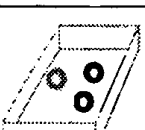

- » Collection organisée (constellations)
- » Organisation aléatoire des éléments

Champ numérique plus vaste: deux dés...

Le recours aux écritures chiffrées

En CP:

le nombre pour comparer

		Je prends la boîte. <input type="radio"/>
		Je ne prends pas la boîte. <input type="radio"/>
		Je prends la boîte. <input type="radio"/>
		Je ne prends pas la boîte. <input type="radio"/>
		Je prends la boîte. <input type="radio"/>
		Je ne prends pas la boîte. <input type="radio"/>
		Je prends la boîte. <input type="radio"/>
		Je ne prends pas la boîte. <input type="radio"/>
		Je prends la boîte. <input type="radio"/>
		Je ne prends pas la boîte. <input type="radio"/>

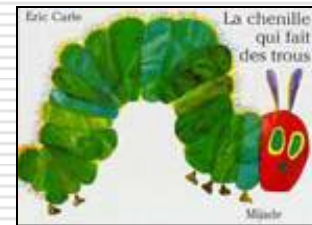
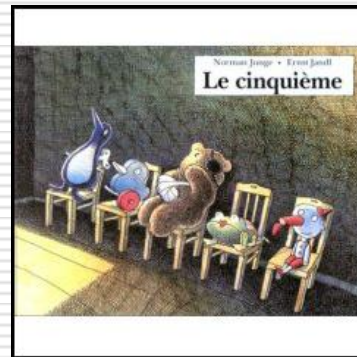
Les boîtes empilées

- Premier dispositif d'évaluation mettant en œuvre une situation simulée
- Familiariser les élèves avec une **représentation** d'une situation **vécue**



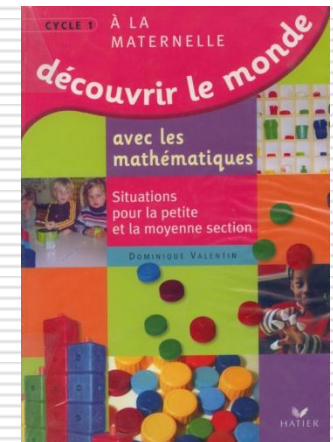
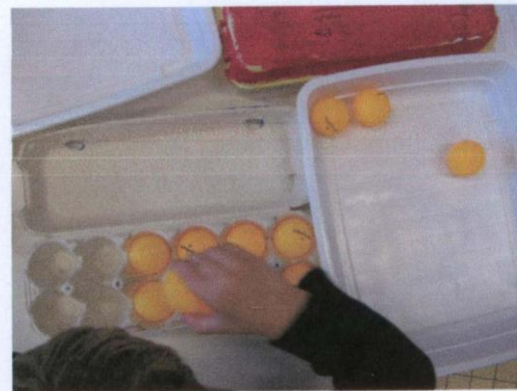
Première approche en TPS / PS

- ❖ Avant même la suite numérique, le « combien » et des techniques de dénombrement : **familiarisation**
 - Avec les mots nombres, les situation numériques
 - Au cours des rituels, des situations fonctionnelles
 - Avec les albums, les comptines, les jeux de doigts



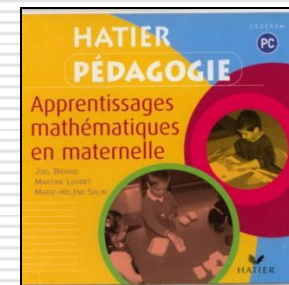
Première approche en TPS / PS

- ❖ Avant même la suite numérique, le « combien » et des techniques de dénombrement : l'idée de collection et de **quantité**
- ❖ *Un peu, beaucoup, trop, assez*



Première approche en TPS / PS

- ❖ Avant même la suite numérique, le « combien » et des techniques de dénombrement : **l'énumération et autres concepts pré numériques**
- ❖ Énumération: énoncer un à un les éléments d'un tout



Autour des quantités : sans recourir aux nombres

❖ Boîtes de couleur

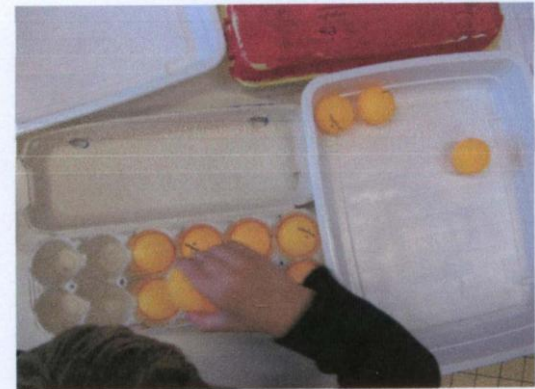
- ❖ Deux enfants ont chacun une boîte de la même couleur
Enfant qui a la petite boîte met des jetons
Celui qui a la grande boîte doit en mettre autant (pareil)
Vérification !
On inverse ...
- ❖ Problème : leurre perceptif



Comparaison sans recourir
aux nombres
Comment valider?

Encore des boîtes !

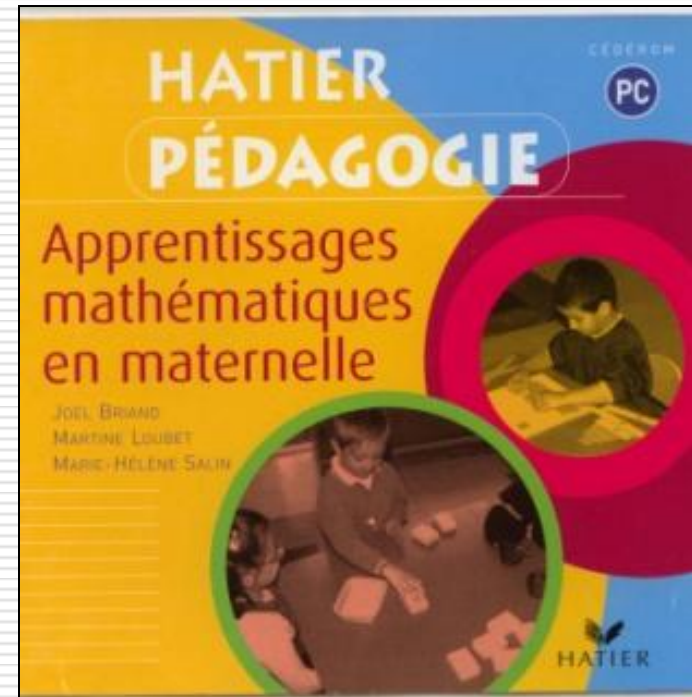
- ❖ Phase 1 : appropriation
- ❖ Trois boîtes de 12 œufs de couleur différente
Mettre une noix dans chaque alvéole d'une boîte de 12 œufs
La boîte et la réserve de noix sont éloignées
Pas de contraintes sur le nombre de voyages
- ❖ Phase 2 : construction de stratégies!
Remplir successivement et exactement
3 boîtes, sans prendre plus de noix
qu'il n'en faut pour remplir une boîte
- ❖ Construire un contrat didactique
pour résoudre de **vrais** problèmes!
- ❖ Comment évaluer ? 😊 😐 😞



Approcher les quantités : autres pistes

Les concepts

- ❖ Collection
- ❖ Énumération
- ❖ Désignation



Concept collection

- ❖ C'est un regroupement d'objets provoqué par:
 - par un critère de fonctionnalité,
 - un critère commun,
 - un critère généré par une circonstance.
- ❖ C'est concevoir ce regroupement comme un tout.
- ❖ Elle est invariante quelque soit de l'ordre.

Concept collection : situations

- ❖ **Un énoncé** : Trois catégories de graines dans trois boîtes
- ❖ **Consigne**: Mets les graines pareilles ensemble dans une boîte

Deux situations

Tri avec des boîtes ouvertes

Tri avec boîtes fermées



Analyse de la situation



❖ Points communs

- Un problème est posé.
- Il y a plusieurs procédures pour résoudre le problème.
- L'élève est capable de s'engager dans le problème.
- L'observation du résultat peut lui permettre de faire évoluer ses stratégies de résolution.
- Il peut recommencer en modifiant sa procédure.
- **Il est capable de reconnaître une catégorie de graines et savoir que ces graines font partie de la collection en cours de constitution.**

Points divergents



L'élève peut vérifier après chaque dépôt de graines si ce sont les graines pareilles qui sont ensemble.

Le contrôle de la constitution de la collection est dévolu au dispositif



La vérification est réalisée lorsque l'élève a fini son tri. C'est un moment fort, très attendu.

L'élève devra organiser sa tâche pour identifier les boîtes qui vont constituer les classes. La réalisation de cet inventaire sollicite le contrôle d'une **énumération**.

Concept énumération

- ❖ Moyen de contrôle de la collection.
- ❖ Exploration exhaustive de la collection:
 - *passer en revue chaque élément,*
 - *ne pas en oublier.*
- ❖ Dysfonctionnement à l'origine d'erreurs dans le comptage.

Les boîtes trouées

- ❖ Il s'agit de remplir des boîtes fermées avec un seul objet dans chaque boîte et dans toutes les boîtes mais sans avoir la possibilité d'observer si la boîte contient déjà un objet
- ❖ Matériel: petites boîtes allumettes trouées, des jetons
8 à 15 boîtes par enfants
- ❖ Première phase: 8 boîtes non fixées : appropriation
- ❖ Deuxième phase : 15 boîtes non fixées : rupture
- ❖ Troisième phase : 8 boîtes fixées : chemin virtuel
- ❖ Quatrième phase : 15 boîtes fixées : idem, nécessité de marquage

Concept désignation

- ❖ Connaissance mise en œuvre pour remplacer un objet ou une collection d'objets par un symbole.
- ❖ Permet de conserver une mémoire de cet objet.
- ❖ Quelle(s) désignation(s) pour une collection?

Concept désignation : situations

- ❖ Situation « valise de Toutou »
- ❖ Situation « les photographies »
- ❖ Evolutions des désignations de la photographie au code commun en GS
- ❖ Concepts
 - de collection
 - de **désignation**
 - d'énumération

Les nombres pour anticiper

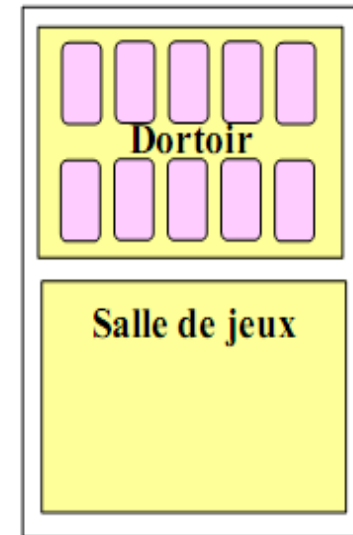
3- Le dortoir (compléments à dix)

Dortoir de 10 lits pour 10 enfants (petits baigneurs)

Quand les enfants ne regardent pas, le maître retire quelques bébés et les place dans la salle de jeux, puis les cache avec une feuille ou un carton.

Combien de baigneurs y a-t-il maintenant dans la salle de jeux ?

Ensuite, même opération, mais en cachant ceux qui restent dans le dortoir.
Intérêt du nombre : **on peut savoir même si on ne voit pas.**



Les nombre pour partager

- ❖ **But** : répartir n baigneurs dans p chambres
- ❖ **Phase 1** : appropriation
Répartir 8 baigneurs dans 3 chambres (rectangles carton), aucune chambre ne doit être vide; tous les baigneurs sont répartis.
Représentation de la répartition
- ❖ **Phase 2** : une autre répartition
Recherche sur feuille (symbolisation)
Validation pragmatique
- ❖ **Phase 3** : le plus de répartitions possibles
- ❖ **Phase 4** : d'autres contraintes...

Quelques références bibliographiques

- ❖ ERMEL, 1990, *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages, GS*, Hatier
- ❖ J.Briand, M.Loubet, M.H.Salin, 2004, *Apprentissages mathématiques en maternelle*, CD Rom, Hatier
- ❖ D.Valentin, 2004, *Découvrir le monde avec les mathématiques-Situations en petite et moyenne section*, Hatier
- ❖ D.Valentin, 2005, *Découvrir le monde avec les mathématiques-Situations en grande section*, Hatier
(prévoir le livre pour l'enseignant, le cahier de l'élève, le matériel pour la classe)
- ❖ L.Ney, C.Rajain, E.Vaslot, 2006, *Des situations pour apprendre le nombre, Cycle 1 et GS*, Scérén, Champagne-Ardenne